脉冲星磁衰减制动力矩对两成分模型自旋的长期减速（理论研究）

李林森

东北师范大学物理学院，长春，130024

摘要：本文的目的研究磁衰减对具有两成分模型的脉冲星自转减速的作用。利用分析方法研究了两成分模型的脉冲星在磁衰减制动力矩作用下两成分的自转角速度随时间变化。给出了具有磁衰减两成分模型的耦合方程组和其解。利用分析解对具有两成分的蟹状星云脉冲星（PSR0531+21，Crab）和船帆座脉冲星（PSR0833-45，Vela）在磁衰减作用下做了数值计算。数值结果表明：两个脉冲星的自转角速度逐年减慢每年为 Crab 减速为 $-0.1710\left(rad/s\right)$，而 Vela 减速为 $-0.0071\left(rad/s\right)$。最后讨论了文中所得到的结果并给出在两成分模型中磁衰减存在的结论。 。

关键词：脉冲星；两成分模型；磁衰减力矩；自旋减速

中图分类好 P1　　文献标识码：A　　文章编号

已知蟹状星云脉冲星（Crab）和船帆座脉冲星（Vela）除有星震外还具有两成分模型。外层是带电的固体外壳，内层是中子超流体。两成分在耦合力矩作用下两者以不同角速度绕自转轴旋转。耦合力矩有引力辐射力矩，磁辐射力矩和磁衰减力矩[1-3]。作者在前文[4]研究了磁辐射制动力矩对蟹状星云脉冲星（Crab）的自转角速度减速的影响。本文继前文研究了磁衰减制动力矩对蟹状星云脉冲星（Crab）和船帆座脉冲星（Vela）的自转角速度的减速影响。

1. 在磁衰减制动力矩作用下的两成分模型的方程组

作者在文[4]根据文[1]给出的两成分模型在耦合力矩作用下的基本方程组：

$$I_c \frac{d\Omega}{dt} = -N - \frac{I_c}{\tau_c}(\Omega - \Omega_n), \tag{1}$$

$$I_n \frac{d\Omega_n}{dt} = -\frac{I_c}{\tau_c}(\Omega - \Omega_n). \tag{2}$$

式中Ω和Ω_n分别是外层固体壳和内部中子超流体层绕着自转轴的角速度。I_c和I_n分别是内外两层的转动惯量：N 是作用在两成分的力矩；τ_c是微观的驰预时间；τ是宏观驰预时间。它们之间的关系在文[4]中已经给出

$$I = I_c + I_n \tag{3}$$

其中 I 是两成分的总转动惯量

中子超流体丰富度 Q

$$Q = {I_n}/{I}, \quad I_n = QI \tag{4}$$

$$I_c = I - I_n = I(1-Q) \tag{5}$$

$$I_c/I_n = \frac{1-Q}{Q} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{I_n}{I}\right) = Q/\tau \tag{7}$$

以下推出在磁衰减制动力矩作用下的力矩形式。根据脉冲星的磁偶极辐射模型，前文[4]利用

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{\Omega^3}{c^3 I}\mu^2. \tag{8}$$

式中μ为磁矩，$\mu = R^3 B Sin\alpha$，R 为脉冲星半径，B 为表面磁场。假定磁偶矩垂直自转轴，$\alpha = 90$，$\mu = R^3 B$.

正如前文[1]将上面方程改为角动量 J 方程

$$\frac{dJ}{dt}=-\frac{2}{3}\frac{\mu^2}{(Ic)^3}J^3,\quad J=I\Omega. \tag{9}$$

积分上述方程

$$\int_{J(t_0)}^{J_m}\frac{dJ}{J^3}=-\frac{2}{3}\int_{t_0}^{t}\frac{\mu^2}{(cI)^3}dt.$$

$J(t_0)$是t_0时的角动量。如果取脉冲星目前（现在）的角速度和角动量，即$t=0$时

的角动量，上述积分取上下限为

$$\int_{J(0)}^{J_m}\frac{dJ}{J^3}=-\frac{2}{3}\int_{0}^{t}\frac{\mu^2}{(CI)^3}dt. \tag{10}$$

磁矩μ随时间的衰减用指数形式[5]，则

$$\mu^2=\mu_0{}^2e^{-\xi t}.\quad \mu^2{}_0=R^6B_0{}^2\ . \tag{11}$$

ξ为磁衰减系数。

将（11）式的μ代入（10）式积分后有

$$J(t)=J(0)\left[1-K\left(e^{-\xi t}-1\right)\right]^{-1/2}. \tag{12}$$

式中常数$K=\dfrac{4\mu_0{}^2\Omega_0{}^2}{3c^3I\xi}$.（13）

（12）式和（13）式同前文[4]的 J 和 K 大有不同。

由（12）式给出力矩 N 的形式：

$$N=-\frac{dJ}{dt}=-J(o)\frac{d}{dt}\left[1-K\left(e^{-\xi t}-1\right)\right]^{-1/2},$$

$$\therefore N=\frac{1}{2}J(o)K\xi e^{-\xi t}\left[1-K\left(e^{-\xi t}-1\right)\right]^{-3/2}. \tag{14}$$

根据前文[4]转动惯量I_c和I_n不变情况下，（12）式的角动量

$$J(t)_m=I_c\Omega+I_n\Omega_n=J(o)_m\left[1-K\left(e^{-\xi t}-1\right)\right]^{-1/2}. \tag{15}$$

将上式改写为

$$\Omega_n=\frac{J(o)_m}{I_n}\left[1-K\left(e^{-\xi t}-1\right)\right]^{-1/2}-\frac{I_c}{I_n}\Omega. \tag{16}$$

式中 $J(o)_m = I\Omega(o)$，利用（4）式和（6）式

$$I/I_n = 1/Q, \quad I_c/I_n = (1-Q)/Q,$$

将其代入（16）式后

$$\Omega_n = \frac{\Omega(o)}{Q}\left[1-K\left(e^{-\xi t}-1\right)\right]^{-1/2} - \frac{(1-Q)}{Q}\Omega. \qquad (17)$$

再将（14）中的 N 和（17）中的 Ω_n 代入（1）式，再利用（7）式 $\frac{1}{\tau_c}=\frac{1}{\tau}\left(I_n/I\right)=Q/\tau$

后得到外壳固体自转角速度在磁衰减力矩的制动下的方程式

$$\frac{d\Omega}{dt}+\frac{1}{\tau}\Omega = \frac{\Omega(o)}{\tau}\left[1-K\left(e^{-\xi t}-1\right)\right]^{-1/2} - \Omega(o)\frac{K\xi e^{-\xi t}}{2(1-Q)}\left[1-K\left(e^{-\xi t}-1\right)\right]^{-3/2}. \qquad (18)$$

利用（7）式

$$\frac{1}{\tau_c}\frac{I_c}{I_n} = \frac{1-Q}{\tau},$$

内部中子超流体层在磁衰减制动作用下自转角速度方程式

$$\frac{d\Omega_n}{dt}+\frac{1-Q}{\tau}\Omega_n = \frac{1-Q}{\tau}\Omega. \quad . \qquad (19)$$

2. 在磁衰减制动力矩作用下两成分耦合方程组的分析解

首先应该解固体外壳层的自转角速度 Ω 的方程式（18），然后再将 Ω 解代入超流层的自转角速度 Ω_n 的方程式（19），再求 Ω_n 的解。

方程式（18）是一阶线性方程式，积分形式为

$$\Omega(t) = e^{-\int\frac{1}{\tau}dt}\,\Omega(0)\int\frac{1}{\tau}[1-K(e^{-\xi t}-1)]^{-3/2} e^{\int\frac{1}{\tau}dt}dt - e^{-\int\frac{1}{\tau}dt}\,\Omega(0)\frac{K\xi}{2(1-Q)}$$
$$\times\int e^{-\xi t}[1-(e^{-\xi t}-1)]^{-3/2} e^{\int\frac{1}{\tau}dt}dt + C.$$

令解的形式为

$$\Omega(t) = e^{-t/\tau}(I_1+I_2) + Ce^{-t/\tau}. \qquad (20)$$

C 为积分常数。

根据上面两式

$$I_1=\Omega(0)\frac{1}{\tau}\int[1-K(e^{-\xi t}-1)]^{-1/2}e^{t/\tau}dt$$

可以证明积分式内第二项 $K(e^{-\xi t}-1)<1$，故可以用二项式定理展开，去掉第三项后有

$$I_1=\Omega(0)\frac{1}{\tau}\int[1+\frac{1}{2}K(e^{-\xi t}-1)]\ e^{t/\tau}dt,$$

$$=\Omega(0)\frac{1}{\tau}\int\left[\left(1-\frac{1}{2}K\right)e^{t/\tau}+\frac{1}{2}Ke\frac{(1-\xi\tau)t}{\tau}\right]dt,$$

$$=\Omega(0)\left[\left(1-\frac{1}{2}K\right)e^{t/\tau}+\frac{K}{2(1-\xi\tau)}e^{-\xi t}(e^{t/\tau})\right],$$

$$\therefore I_1=\Omega(0)e^{t/\tau}\left[\left(1-\frac{1}{2}K\right)+\frac{K}{2(1-\xi\tau)}e^{-\xi t}\right].\qquad(21)$$

$$I_2=-\Omega(0)\int\frac{K\xi e^{-\xi t}}{2(1-Q)}\left[1-K\left(e^{-\xi t}-1\right)\right]^{-3/2}e^{t/\tau}dt,$$

$$=-\Omega(0)\frac{K\xi}{2(1-Q)}\int e^{-\xi t}\left[1+\frac{3}{2}K(e^{-\xi t}-1)\right]e^{t/\tau}dt,$$

$$=-\Omega(0)\frac{K\xi}{2(1-Q)}\int\left[\left(1-\frac{3}{2}K\right)e^{(1-\xi t)t/\tau}+\frac{3}{2}Ke^{(1-2\xi\tau)t/\tau}\right]dt,$$

$$I_2=-\Omega(0)e^{t/\tau}\left[\frac{K\xi\tau\left(1-\frac{3}{2}K\right)}{2(1-Q)(1-\xi\tau)}e^{-\xi t}+\frac{3K^2\xi\tau e^{-2\xi t}}{4(1-Q)(1-2\xi\tau)}\right].\qquad(22)$$

将（21）式和（22）式代入（20）式

$$\Omega(t)=\Omega(0)e^{t/\tau}\left[\left(1-\frac{1}{2}K\right)+\frac{Ke^{-\xi t}}{2(1-\xi\tau)}-\frac{K\xi\tau\left(1-\frac{3}{2}K\right)}{2(1-Q)(1-\xi\tau)}e^{-\xi t}-\frac{3}{4}\frac{\xi\tau K^2}{(1-Q)(1-2\xi\tau)}e^{-2\xi t}\right]$$

$$+Ce^{-t/\tau}.\qquad(23)$$

令 t=0，得到常数 C

$$C=\Omega(0)\left[\frac{1}{2}K-\frac{K}{2(1-\xi\tau)}+\frac{\xi\tau K\left(1-\frac{3}{2}K\right)}{2(1-Q)(1-\xi\tau)}+\frac{3}{4}\frac{K^2\xi\tau}{(1-Q)(1-2\xi\tau)}\right].$$

将常数 C 代入（23）式后得到解析解

$$\Omega(t)=\Omega(0)\left\{1+\frac{K}{2(1-\xi\tau)}\left[1-\frac{\xi\tau(1-\frac{3}{2}K)}{1-Q}\right](e^{-\xi t}-1)-\frac{3}{4}\frac{K^2\xi\tau}{(1-Q)(1-2\xi\tau)}(e^{-2\xi t}-1)\right\}\cdots$$

（24）

将上式$\Omega(t)$代入（19）式后可得到超流体内层角速度Ω_n。考虑到Ω_n是壳层内部层的角速度，一般观测不到，而且推导的式子沉长，故只研究外壳层的自转角速度变化，略去了内层超流体自转角速度的解。

3. 脉冲星 PSR0531+21（Crab）和 PSR0833-45（Vela）的理论数值结果

本文研究具有两成分模型的脉冲星 PSR0531+21 和 PSR0833-45 在磁衰减作用下外壳固体层的自转角速度变化，为此先列出两个脉冲星的物理参数如表 1。其中Ω_0，Q，τ引自文献[6，7]，表面磁场引自文献[8]，$\mu_0=R^3B_0$一般假定中子星的半径$R=1.2\times10^6 cm$，转动惯量引自文献[1] $I=1.4\times10^{45}(cm^2\cdot g)$，磁衰减系数$\xi=1.1111\times10^{-6}/yr$， $\tau_D=2/\xi=1.8\times10^6\ yr.$ [9] .

表 1 脉冲星 PSR0531+21（Crab）和 PSR0833-45（Vela）的物理参量

Table 1 Data for PSR0531+21 and PSR0833-45

脉冲星 Pulsars	$\Omega_0(rad/s)$	$Q=I_c/I$	$\tau(d)$	$B\times10^{12}(G)$
PSR0531+21(Crab)	190	0.690	7.7(d)	3.78
PSR0833-45（Vela）	70.5	0.145	1.2(yr)	3.38

将表 1 中的数据和 R，I，ξ 的数值代入（11）式和（13）式给出的 μ_0 和 K 的数值，再取时间间隔 $t=1yr$，数值结果如表 2。

表 2 脉冲星 PSR0531+21 和 PSR0833-45 的数值结果（t=1yr）

Table 2 Numerical results for PSR0531+21 and PSR0833-45 (t=1yr)

脉冲星 Pulsars	$\mu_0 \times 10^{30} (cm^3 \cdot G)$	$K(c \cdot g \cdot s)$	$\Omega(t)/\Omega(0)$	$\Omega(t)(rad/s)$	$\delta\Omega(rad/s)$
PSR0531+21	6.53	1546.2	0.9991	189.8270	-0.1710
PSR0833-45	5.84	170.2	0.9999	70.4929	-0.0071

4. 讨论和结论

（1）从表 2 的数值结果，脉冲星 PSR0531+21 和 PSR0833-45 在磁衰减力矩作用下壳层自转角速度逐年随时间长期减小。PSR0531+21 每年减小大于 PSR0833-45 的减少，这主要是由两者的 K 值不同。K 值同磁场和角速度有关。根据表 1，Crab 的磁场大于 Vela 的磁场，而两者的角速度相差很大，PSR0531+21 的角速度几乎大于 PSR0833-45 的两倍以上，故前者的 K 值大于后者的 K 值，所以 PSR0531+21 的减速大于 PSR0833-45 的减速。

（2）同前文【4】相比较，对于 PSR0531+21 的磁辐射作用使其角速减小每年值 $\delta\Omega=-0.2450(rad/s)$ 而在本文磁衰减作用使角速减慢值 $\delta\Omega=-0.1710$，故磁衰减作用稍小于磁辐射作用。磁辐射是由于脉冲星高速自转能转换来的，而磁衰减是由于磁场减弱造成的。然而自转能的损失加快辐射力矩作用远远大于磁场衰减的作用。故磁辐射对脉冲星自转效应大于磁矩衰减对自转产生的效应。

（3）关于（10）式积分限取值，其下限 $t_0=0$，可以理解脉冲星诞生时的开始时间，但本文不是研究脉冲星诞生时的演化问题。另外也可以理解脉冲星星震后的开始时间，但星震后的开始时间角动量 J_0 和 Ω_0 值不好确定，而我们所知道

的 J_0 和 Ω_0 是目前开始的值，如表 1 的数值，所以在积分式（10）t_0 取值最好是从目前 t=0 开始为宜。

（4）关于（21）式和（22）式中的 $[1-K(e^{-\xi t}-1)]^{-1/2}$ 和 $[1-K(e^{-\xi t}-1)]^{-3/2}$，只有 $K(e^{-\xi t}-1)<1$ 才能用二项式定理展开。首先估计下 $K(e^{-\xi t}-1)$ 的数值：根据文[9] $\tau_D=1.8\times10^6$ 年 $\xi=2/\tau_D=1.11\times10^{-6}/$ 年。本文取时间间隔一年，t=1 年，$e^{-\xi t}-1=0.0000011$，对于 PSR0531+21，K=1546.2，$K(e^{-\xi t}-1)=0.0017<1$；对于 PSR0833-45，K=170.2，$K(e^{-\xi t}-1)=0.00018<1$.因此，两式可以用二项式定理展开

$$[1-K(e^{-\xi t}-1)]^{-1/2}=1+\frac{1}{2}(e^{-\xi t}-1)+\frac{3}{8}(e^{-\xi t}-1)^2+\cdots$$

其中 $(e^{-\xi t}-1)^2=1.21\times10^{-12}$，所以第三项可以略去。

5. 脉冲星 PSR0531+21（Crab）和 PSR0833-45（Vela）具有星震的两个脉冲星。前者每隔三年，后者每隔二年发生一次星震或跃变。跃变发生时是突然暂短加速后恢复跃变前的角速度，而这种跃变近似周期性的。本文给出的这两个脉冲星的减速是长期角速减慢效应，而临时突然加速不会影响长期减速效应。[10，11]

6. 本文得到的结论是，脉冲星两成分模型磁衰减是存在的，它影响角速度长期减慢的作用。这种作用是通过磁矩衰减制动角速度而造成减慢的。

参考文献

[1] Shapro S L, Teeukolsky S A, Black hole, white and neutron stars: the pfysics of compact bjects [M]. NewYork;JohnWiley&Sons,1983 ;247-295。 :

[2] Pines D, Observing neutron stars, information on stellar structure from pulsar s and compact x-ray soirees [C]. Proceeding of the sixteenth solay conference on physics. Brussels, Belgium, September 24-28, 1973, 1974 ; 147-173 .

[3] Sedrakian. DM. Rotation of a two-component model Neutron star in GTR [J]. Astrophysics, 1997, 40(3) ; 250-266.

[4] 李林森. 脉冲星辐射制动力矩对具有磁辐射的两成分模型自旋的长期减速[J]. 天文研究与技术，2016，vol13， No.3 ; 277-283 .

[5] 李林森. 脉冲星在磁偶极辐射作用下的演变[J]. 东北师大学报 （自然科学版），1981，No1 ;37-42 .

[6] 中国科学院上海天文台情报室，观测脉冲星得到的中子星结构[J]. 1973；1-11

[7] 唐小英. 中子星星震与脉冲星加速[J]. 北京天文台台刊，1975（4）；68-81。

[8] Manchester R N, Hobbs G B, Teoh A et al, The Australia Telescope National Facility pulsars catalogue [J]. The Astronomical Journal, 2005, 129(4) ； 1993-2006。

[9] 汪珍茹，曲钦岳，陆琰，罗辽复. 脉冲星射电光度的统计分析[J]. 天文学报，1979，20（2）；199-204。

[10] Baym. G, Pethick. G. Pines D et al. Spin: up in neutron stars. The future of the Vela Pulsar [J]. Nature, 1969, 224 ； 872-874。

[11] D’Alessandro F. Rotational Irregularities in pulsars- A Review [J]. Astrophysics and Space science 1997, 246,； 73-106。

The Impact of Magnetic Decay Braking Torque on the Secular Retardation of Spin of Two-Components of Pulsars

Li Linsen

School of physics of Northeast Normal University Changchun, 130024

Abstract: The purpose of this paper researches the action of magnetic decay on

spin down of two-component of pulusar. The secular speed down of the magnetic decay braking torque on a model of two-components of pulsars is studied by using the analytical method. The analytical solutions of the couled equation system with the model of two-components are given. The analytical solutions obtained are applied to the research for PSR0531+21 (Crab) and PSR0833-45 (Vela). The numerical results show that spin of Crab and Vela pulsars speed down in 1 yr: -0.1710 (rad/s) and -0.0071 (rad/s) respectively. The results obtained are discussed in this paper and the conclusion that magnetic decay exists in two-component model is given especially. The discussions and conclusion are held on the obtained results.

Key words: Pulsar;；Two-component model;； Magnetic decay torque； Speed down